POLISH ACADEMY OF SCIENCES - COMMITTEE OF MATERIALS SCIENCE
SILESIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY OF GLIWICE
INSTITUTE OF ENGINEERING MATERIALS AND BIOMATERIALS
ASSOCIATION OF ALUMNI OF SILESIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Conference Proceedings

12th INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
ACHIEVEMENTS IN MECHANICAL & MATERIALS ENGINEERING

# Problem syntezy drgającego płaskiego układu mechanicznego z liniowymi sprzężeniami

J. Świder, K. Foit

Wydział Mechaniczny Technologiczny, Katedra Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska,
ul. Konarskiego 18A, 44-100 Gliwice, Polska

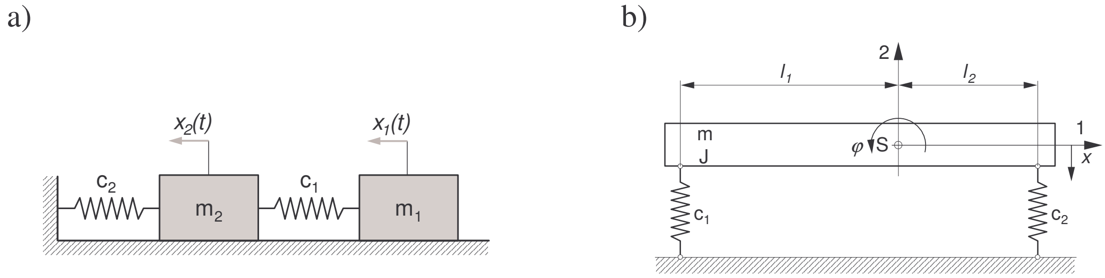
Rozwijany w ośrodku gliwickim algorytm syntezy drgających układów mechanicznych nie obejmował dotychczas zagadnienia sprzężeń pomiędzy współrzędnymi niejednorodnymi. W prowadzonych badaniach z zakresu syntezy drgających układów mechanicznych opisanych współrzędnymi niejednorodnymi dokonywano podziału układu i nie uwzględniano sprzężeń. Opracowane metody bazują na opisie za pomocą współrzędnych jednorodnych [1, 2, 3] lub za pomocą klas współrzędnych jednorodnych [4, 5]. W niniejszej pracy zostanie omówione zagadnienie uwzględnienia liniowych sprzężeń pomiędzy współrzędnymi niejednorodnymi opisującymi układ.

## 1. WPROWADZENIE

Problem syntezy drgających układów mechanicznych opisanych współrzędnymi niejednorodnymi z uwzględnieniem liniowych sprzężeń występujących w układzie jest nowym zagadnieniem w dziedzinie badań prowadzonych w ośrodku gliwickim. Opracowane dotychczas i zaimplementowane w językach programowania wysokiego poziomu algorytmy bazowały na opisie we współrzędnych jednorodnych bądź w klasach współrzędnych jednorodnych. Takie podejście umożliwiało syntezę układów o jednym kierunku drgań albo układów, w których ruch drgający odbywa się w różnych kierunkach, lecz nie są uwzględniane sprzężenia lokalne. Stąd pojawiła się potrzeba prowadzenia dalszych badań nad metodą, która pozwoli na uwzględnienie sprzężeń lokalnych pomiędzy współrzędnymi. W pracy ograniczono się do płaskiego układu o dwóch stopniach swobody opisanego współrzędnymi niejednorodnymi. W dalszym ciągu zostanie zaprezentowana metoda będąca wynikiem przeprowadzonych badań.

## 2. PODOBIEŃSTWA W OPISIE DYNAMIKI DRGAJĄCYCH UKŁADÓW OPISANYCH WSPÓŁRZĘDNYMI JEDNORODNYMI I NIEJEDNORODNYMI

Niech będą dane układy drgające w opisie współrzędnych jednorodnych (rys. 1(a)) oraz w opisie współrzędnych niejednorodnych (rys. 1(b)).




Rys. 1. Układ drgający o dwóch stopniach swobody opisany współrzędnymi jednorodnymi (a) oraz współrzędnymi niejednorodnymi (b)

Dokonując analizy dynamiki układu przedstawionego na rys. 1(a) otrzymano macierz sztywności w postaci

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} c_1 + m_1 p^2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 + m_2 p^2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

W odniesieniu do układu przedstawionego na rys. 1(b) przeprowadzono analizę dynamiki stosując metody grafów hybrydowych. Uzyskana w ten sposób macierz sztywności ma postać

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + mp^2 & c_1 l_1 - c_2 l_2 \\ c_1 l_1 - c_2 l_2 & c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + Jp^2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Dokonując porównania macierzy danych wzorami (1) i (2) sformułowano następujące wnioski:

- macierz sztywności układu opisanego współrzędnymi jednorodnymi i macierz sztywności układu opisanego współrzędnymi niejednorodnymi posiadają ten sam wymiar,
- identyczna jest struktura obu macierzy: elementy na pierwszej przekątnej wyrażają dynamikę niezależnych podukładów, natomiast na drugiej przekątnej znajdują się wyrażenia opisujące sprzężenia występujące w układzie,
- równanie charakterystyczne dane wyrażeniem $\det \mathbf{Z} = 0$ można zapisać w ogólnej postaci

$$Ap^4 + Bp^2 + C = 0, \tag{3}$$

gdzie *A*, *B*, *C* oznaczają odpowiednie współczynniki, które w przypadku układów o takich samych częstościach drgań własnych mają tę samą wartość liczbową (z dokładnością do współczynnika skali) w odniesieniu do układu opisanego współrzędnymi jednorodnymi i układu opisanego współrzędnymi niejednorodnymi, natomiast $p$ jest operatorem Laplace'a.

## 3. ALGORYTM SYNTEZY PŁASKIEGO DRGAJĄCEGO UKŁADU MECHANICZNEGO OPISANEGO WSPÓŁRZĘDNYMI NIEJEDNORODNYMI Z UWZGLĘDNIENIEM SPRZĘŻEŃ

W kolejności zostaną przedstawione założenia niezbędne do sformułowania algorytmu syntezy. Są one następujące:

1. Struktura wynikowa układu jest z góry znana i ma postać jak na rys. 1(b).
2. Elementy sprężyste posiadają określoną sztywność w kierunku osi 2, natomiast w kierunku osi 1 ich sztywność jest nieskończenie wielka.
3. Na układ nie działają wymuszenia dynamiczne lub kinematyczne.
4. Współrzędne uogólnione określają położenie środka masy w ruchu wzdłużnym i obrotowym względem osi przyjętego układu współrzędnych.

Na podstawie tak sformułowanych założeń algorytm syntezy przedstawia się następująco:
1. Określić częstości drgań własnych oraz operatorową postać charakterystyki dynamicznej.
2. Przeprowadzić rozkład charakterystyki na ułamek łańcuchowy otrzymując parametry $m_1$, $m_2$, $c_1$ i $c_2$ w odniesieniu do układu przedstawionego na rys. 1(a).
3. Przypisać odpowiednie wartości otrzymanych parametrów inercyjnych układu opisanego współrzędnymi jednorodnymi do parametrów inercyjnych układu opisanego współrzędnymi niejednorodnymi w następujący sposób: $m_n = m_1$, $J_n = m_2$, gdzie $m_n$ oznacza masę, a $J_n$ masowy moment bezwładności w układzie opisanym współrzędnymi niejednorodnymi.
4. Określić liczbowe wartości elementów macierzy sztywności odnoszącej się do układu opisanego współrzędnymi niejednorodnymi (2) (tożsame z macierzą sztywności odnoszącej się do układu opisanego współrzędnymi jednorodnymi).
5. Przyjąć wartość odległości punktu koincydencji elementu inercyjnego i sprężystego, przy czym

$$l_2 \in \left( 1; \frac{-J_n\omega^2 - z_{22(j)}}{z_{11(j)}} \right), \tag{4}$$

ze względu na fizyczną realizowalność
6. Wyznaczyć wartości sztywności $c_{1(n)}$, $c_{2(n)}$ oraz odległość $l_1$ w odniesieniu do układu opisanego współrzędnymi niejednorodnymi na podstawie układu równań

$$\begin{cases} c_{1(n)} + c_{2(n)} + m_n p^2 = z_{11(j)} \\ c_{1(n)}l_1 - c_{2(n)}l_2 = z_{12(j)} = z_{21(j)} \\ c_{1(n)}l_1^2 + c_{2(n)}l_2^2 + J_n p^2 = z_{22(j)} \end{cases}, \tag{5}$$

przy czym indeks (j) odnosi się do układu opisanego współrzędnymi jednorodnymi, natomiast (n) - do układu opisanego współrzędnymi niejednorodnymi.

## 4. PODSUMOWANIE

Przedstawiony algorytm umożliwia uzyskanie parametrów dynamicznych drgającego układu o dwóch stopniach swobody, opisanego współrzędnymi niejednorodnymi, z uwzględnieniem sprzężeń. Kolejne etapy badań zostaną poświęcone poszukiwaniu metod wyznaczania parametrów dynamicznych w odniesieniu do układów kaskadowych opisanych dwiema klasami współrzędnych niejednorodnych wraz z uogólnieniem na układy przestrzenne.

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego 5 T07C 02923.

## LITERATURA

1. A. Buchacz, Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Mechanika z. 104. Gliwice, 1991.
2. A. Dymarek, Odwrotne zadanie tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Zeszyty Naukowe Katedry Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska, Gliwice, 2001.
3. T. Dzitkowski, Odwrotne zadanie dynamiki dyskretno ciągłych układów mechanicznych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Zeszyty Naukowe Katedry Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska, Gliwice, 2002.
4. K. Foit, Synteza drgających układów mechanicznych opisanych współrzędnymi niejednorodnymi. W: Zeszyty Naukowe Katedry Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska, Zeszyt 3: Inżynieria Produkcji, zarządzanie, mechanika, metody techniki, Gliwice 2003.
5. K. Foit, J. Świder, Niejednoznaczność opisu struktury w algorytmie syntezy płaskich kaskadowych układów mechanicznych opisanych współrzędnymi niejednorodnymi. Proceedings of the 11th Scientific Conference "Achievements in Mechanical & Materials Engineering" AMME 2002.