POLISH ACADEMY OF SCIENCES - COMMITTEE OF MATERIALS SCIENCE
SILESIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY OF GLIWICE
INSTITUTE OF ENGINEERING MATERIALS AND BIOMATERIALS
ASSOCIATION OF ALUMNI OF SILESIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Conference Proceedings

12th INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
ACHIEVEMENTS IN MECHANICAL & MATERIALS ENGINEERING

Stochastyczna metoda wyznaczania grubości warstw kompozytowych na odlewach

C. Baron, J. Gawroński

Zakład Odlewnictwa, Instytut Materiałów Inżynierskich i Biomedycznych,
Wydział Mechaniczny Technologiczny Politechnika Śląska
44 – 100 Gliwice, ul. Towarowa 7, Polska

W pracy przedstawiono zależności między grubością warstwy kompozytowej, a prawdopodobieństwem jej zaistnienia w określonej płaszczyźnie powierzchniowej.
Wyprowadzone zostały równania różniczkowe określające te zależności oraz podane zostały analityczne rozwiązania tych równań. Określona została zmienna losowa „grubości warstwy" i prawdopodobieństwo jej wystąpienia.

1. WSTĘP

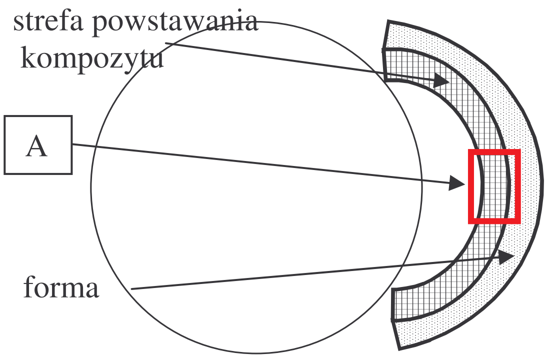
W pracy [1] powstawanie warstwy kompozytowej związane jest z błądzeniem przypadkowych cząstek i procesem dyfuzji. Przedstawione tam równanie Fokkera – Planca dla dyfuzji określa położenie cząstki w chwili t w określonym przedziale na osi x. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w chwili t przesunięcie cząstki zawarte jest w określonym przedziale jest rozwiązaniem tego równania. Prawdopodobieństwo to określone wzorem

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{y_0}^{y_1} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} dx$$

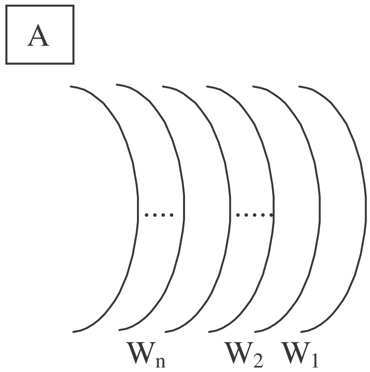
i zależy głównie od czasu, współczynników dyfuzji oraz prędkości cząstek. Na podstawie tych prawdopodobieństw możemy myśleć o wyznaczeniu grubości warstwy kompozytowej na odlewach jako wartości oczekiwanej zmiennej losowej będącej położeniem cząstki w przestrzeni. Niniejsza praca stanowi dyskretny aspekt tego problemu, często prostszy do zrealizowania.

2. OKREŚLENIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH DLA WARSTWY KOMPOZYTOWEJ.

W celu wyprowadzenia odpowiednich równań część odlewu, dotyczącą warstwy kompozytowej, w której następuje dyfuzja dzielimy na warstwy



Rys.1 Forma wraz z strefą powstawania kompozytu



Rys.2 Podział na warstwy strefy powstawania kompozytu

Niech W_n oznacza takie zdarzenie (stan), że w chwili t proces dyfuzyjny obejmuje *n-tą* warstwę. W tej sytuacji dopuszcza się dalej dwa przypadki: albo w przedziale czasu $(t, t+\Delta t)$ proces zatrzyma się na warstwie W_n albo przesunie się do warstwy następnej. Zakładamy dalej, że niezależnie od tego, ile warstw objął proces dyfuzji w czasie $(0, t)$ prawdopodobieństwo objęcia procesem w czasie $(t, t+h)$ kolejnej warstwy wynosi

$$P_n(t) = \lambda_n h$$

jest proporcjonalne do czasu trwania i zależne jest również od kolejnej warstwy (λ_n), a prawdopodobieństwa przejścia do więcej niż jednej warstwy jest równe *0*.

Rozpatrzmy dwa kolejne przedziały czasu $(0, t)$ i $(t, t+h)$, gdzie h jest małe. Jeżeli $n \geq 1$ to dokładnie n warstw może zostać osiągnięte w czasie $(0, t+h)$ na trzy wyłączające się sposoby:

1. w czasie $(0, t)$ osiągnięte zostało n warstw i w czasie $(t, t+h)$ nie nastąpiło przejście do kolejnej warstwy.
2. $n-1$ warstw osiągnięte zostało w czasie $(0, t)$ i w czasie $(t, t+h)$ nastąpiło przejście procesu do kolejnej warstwy.
3. $n_0 \geq 2$ warstw osiągnięte zostało w czasie $(t, t+h)$ i $n-n_0$ warstw osiągnięte zostało w czasie $(0, t)$.

Przy oznaczeniu przez $P_{n(t)}$ prawdopodobieństwa, że w chwili t osiągamy warstwę W_n, funkcje te spełniają układ równań [2]

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda_n h) + P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h \qquad (*)$$

wynikający z postulatów 1,2,3 gdyż prawdopodobieństwo pierwszej możliwości jest równe iloczynowi $P_{n(t)}$ przez prawdopodobieństwo nie nastąpienia zmiany w czasie $(t, t+h)$ równe $1-\lambda_n h$. Drugi postulat prowadzi do prawdopodobieństwa $P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h$, a trzeci to prawdopodobieństwo równe *0*.

Dzieląc równania (*) przez h otrzymamy

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda_n P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

Przechodząc do granicy z $h \to 0$ otrzymamy układ równań różniczkowych określających prawdopodobieństwa przejścia z jednej warstwy kompozytowej do kolejnej

$$P_n^{\sim}(t) = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) \qquad n \geq 1 \qquad (**)$$
$$P_0\,(t) = -\lambda_0 P_0(t)$$

Z równań tych obliczamy najpierw $P_0(t)$, a następnie kolejno wszystkie $P_n(t)$.
Stanem początkowym całego procesu będzie warstwa W_0 i przyjmujemy, że $P_0(0)=1$ czyli pierwsza warstwa musi zostać osiągnięta, natomiast jest niemożliwe, aby w chwili $t=0$ przejść do warstwy dalszej $n \geq 2$ czyli $P_n(0)=0$

3. ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH DLA WARSTWY KOMPOZYTOWEJ PRZY ZAŁOŻENIU, ŻE $\lambda_n=\lambda$

Jeżeli założymy, że współczynnik proporcjonalności przejścia dla wszystkich warstw jest taki sam (co nie musi się zdarzyć), to można otrzymać efektywne analityczne rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} P_n'(t) = -\lambda\ P_n(t) + \lambda\ P_{n-1}(t) & n \geq 1 \\ \qquad P_0'(t) = -\lambda\ P_0(t) & \end{cases}$$

mamy

$$P_0'(t) = -\lambda\ P_0(t)$$

$$\ln P_0(t) = -\lambda t + \ln C$$

$$P_0(t) = Ce^{-\lambda t}$$

dla $P_0(0)=1$ zatem $C=1$
i ostatecznie

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

Jest to równanie liniowe i rozwiązując je metodą uzmienniania stałej mamy

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t)$$

$$P_1(t) = Ce^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = C(t)e^{-\lambda t}$$

$$P_1^{`}(t) = C^{`}(t)e^{-\lambda t} + C(t)(-\lambda)e^{-\lambda t}$$

$$C^{`}(t)e^{-\lambda t} + C(t)(-\lambda)e^{-\lambda t} + C(t)\lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$C^{`}(t) = \lambda$$

$$C(t) = \lambda t + C$$

$$P_1(t) = (\lambda t + C)e^{-\lambda t} \qquad ale \qquad P_n(0) = 0$$

zatem *C=0*
i mamy $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Postępując analogicznie z równaniem

$$P_2^{`}(t) = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

otrzymamy

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

Uogólniając możemy napisać, że

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Stosując zasadę indukcji matematycznej można to uogólnienie udowodnić.
Dla $n=0$ mamy, że $P_0(t)=e^{-\lambda t}$.
Zakładamy, że

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

i wykażemy, że zachodzi

$$P_{n+1}(t) = \frac{\lambda^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t}$$

$$P_{n+1}^{`}(t) = -\lambda P_{n+1}(t) + \lambda P_n(t)$$

$$P'_{n+1}(t) = -\lambda P_{n+1}(t)$$

$$P_{n+1}(t) = Ce^{-\lambda t}$$

$$P_{n+1}(t) = C(t)e^{-\lambda t}$$

$$P'_{n+1}(t) = C'(t)e^{-\lambda t} + C(t)e^{-\lambda t}(-\lambda)$$

czyli

$$C'(t)e^{-\lambda t} + C(t)e^{-\lambda t}(-\lambda) = -\lambda C(t)e^{-\lambda t} + \lambda P_n(t)$$

$$C'(t) = e^{\lambda t}\lambda P_n(t)$$

z założenia

$$C'(t) = \lambda e^{\lambda t}\frac{\lambda^n t^n}{n!}e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^{n+1}t^n}{n!}$$

stąd

$$C(t) = \frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}$$

I ostatecznie otrzymujemy tezę, czyli

$$P_{n+1}(t) = \frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda t}$$

Otrzymaliśmy ogólne analityczne rozwiązanie układu równań.

4. WNIOSKI

a. Otrzymana rozwiązanie układu równań może nie wystarczyć do opisu badanego zjawiska i wymagane będzie założenie, że współczynniki proporcjonalności λ_n są różne; wymaga to poszukiwań rozwiązań analitycznych lub, co będzie łatwiejsze, rozwiązań numerycznych.
b. Otrzymane prawdopodobieństwa $P_{n+1}(t)$ przy dużych t maleją do zera, gdyż

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda t} = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda^{n+1}t^{n+1}}{(n+1)!e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^{n+1}e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{\lambda t}} = 0 \qquad dla \qquad \lambda > 0$$

co oznacza, że proces po pewnym czasie zaniknie; prawdopodobieństwo osiągnięcia kolejnej warstwy kompozytowej staje się niemożliwe, co rzeczywiście ma miejsce po zakrzepnięciu odlewu; grubość warstwy kompozytu wyznacza więc ostatnia osiągnięta warstwa W_n.

c. Opisane wyniki wymagają ilustracji doświadczalnej; przy przeprowadzaniu doświadczenia powinniśmy ustalić zależność współczynnika λ_n od warunków wykonywania odlewów oraz od składu chemicznego.

LITERATURA

1. Cz. Baron, Wyznaczenie grubości warstw kompozytowych na odlewach – rozważania teoretyczne, DOKSEM 2003
2. W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1966
3. Z. M. Jarzębski, Dyfuzja w metalach, Śląsk 1975