POLISH ACADEMY OF SCIENCES - COMMITTEE OF MATERIALS SCIENCE
SILESIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY OF GLIWICE
INSTITUTE OF ENGINEERING MATERIALS AND BIOMATERIALS
ASSOCIATION OF ALUMNI OF SILESIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Conference Proceedings

12th INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
ACHIEVEMENTS IN MECHANICAL & MATERIALS ENGINEERING

Zastosowanie grafów przepływowych w modelowaniu drgających układów ciągłych

A. Sękala, J. Świder

Katedra Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Wydział Mechaniczny Technologiczny, Politechnika Śląska,
ul. Konarskiego 18a, 44-100 Gliwice, Poland

W artykule został przedstawiony sposób modelowania drgających układów mechanicznych o parametrach rozłożonych w sposób ciągły za pomocą grafów przepływowych. Wykorzystanie metody grafów przepływowych w modelowaniu układów ciągłych pokazano na przykładzie dwuogniwowego układu prętowego drgającego wzdłużnie.

1. WPROWADZENIE

Prowadzenie analizy drgań złożonych układów mechanicznych wiąże się ze stosowaniem aparatu matematycznego w postaci równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych lub metod macierzowych. Korzystanie z tych metod, które w literaturze nazywa się „metodami klasycznymi” przysparza jednak trudności związanych z tworzeniem i rozwiązywaniem odpowiednich układów równań ruchu. W przypadku analizy układu zbudowanego z dużej liczby podukładów, gdy zachodzi konieczność modyfikacji struktury układu należy każdorazowo formułować od początku równania różniczkowe ruchu, bądź od nowa budować macierze bezwładności, sztywności, tłumienia i inne. Z powodu tych niekorzystnych cech klasycznych metod badania układów mechanicznych poszukiwane są takie metody opisu i interpretacji zjawisk dynamicznych, które zapewniłyby łatwy sposób zinterpretowania ich w kategoriach danej dziedziny techniki, jak również pozwoliłyby na ich oprogramowanie. Metody badania układów mechanicznych, które rozwijane są w ośrodku gliwickim, oparte na metodach grafów i liczb strukturalnych w literaturze nazywane są „nieklasycznymi”. Zastosowanie grafów przepływowych, które są w istocie graficzną reprezentacją układu równań liniowych umożliwia pełną algorytmizację obliczeń przy wyznaczaniu charakterystyk dynamicznych badanych modeli układów drgających, bez konieczności ponownego tworzenia równań różniczkowych ruchu przy zmianie struktury układu [1, 2, 3, 4].

2. OBIEKT BADAŃ

Przedmiotem rozważań jest struktura K dowolnego układu mechanicznego, o ciągłym rozkładzie parametrów i o odcinkowo stałym przekroju, zdefiniowana jako:

$$K = \langle S, R_z \rangle, \tag{1}$$

gdzie: S – jest zbiorem zmiennych uogólnionych przemieszczeń i sił,

R_z – relacją bilateralną, określoną następująco:

$$\langle {}_1s_i, {}_2s_j \rangle \in S \bigvee_{\gamma_P} \{\gamma_p({}_1s_i) = {}_2s_j\} \wedge {}_1s_i, {}_2s_j \in S \tag{2}$$

gdzie: $\gamma_p \in \Gamma$ (i, j= 1, 2, …, n; n – jest liczbą wierzchołków grafu; p = 1, 2, …, card Γ),

F – zbiór funkcji γ_p określony na zbiorze S.

W modelowaniu rozpatrywanej klasy układów, zależności pomiędzy amplitudami sił uogólnionych ${}_2s_j \in {}_2S$ i uogólnionych przemieszczeń ${}_1s_i \in {}_1S$ wyraża się stosując pojęcie podatności dynamicznej Y_{ij}, czyli opatrzonej znakiem amplitudy przemieszczenia uogólnionego w kierunku i – tej współrzędnej uogólnionej, wywołanego uogólnioną siłą w postaci funkcji harmonicznej o amplitudzie jednostkowej, odpowiadającej j – tej współrzędnej uogólnionej, to znaczy:

$${}_1s_i = Y_{ij}\,{}_2s_j \tag{3}$$

gdzie: ${}_2s_j = e^{a\omega t}$, $a = \sqrt{-1}$, ω -częstość[2].

W celu uzyskania struktury grafu reprezentującej model układu, należy dokonać odwzorowań:

- zbiór uogólnionych przemieszczeń układu – w węzły ${}_1\underset{1}{x}_i$ grafu przepływowego

$$f_1: {}_1S \to {}_1X \tag{4}$$

w ten sposób, że:

$$f_1({}_1s_i) = {}_1\underset{1}{x}_i \tag{5}$$

gdzie: ${}_1s_i \in {}_1S$, ${}_1\underset{1}{x}_i \in {}_1X$.

- zbiór uogólnionych sił – w węzły ${}_1\underset{2}{x}_j$ grafu przepływowego

$$f_2: {}_2S \to {}_1X \tag{6}$$

w ten sposób, że:

$$f_2({}_2s_i) = {}_1\underset{2}{x}_j \tag{7}$$

gdzie: ${}_2s_j \in {}_2S$, ${}_1\underset{2}{x}_j \in {}_1X$,

- zbiór elementów funkcji Γ - w łuki ${}_2x_{ij}$ grafu przepływowego

$$f_3: \Gamma \to {}_2X \tag{8}$$

w ten sposób, że:

$$f_3(\gamma_P) = {}_2x_{ij} \tag{9}$$

gdzie: $\gamma_P \in \Gamma$; p = 1, 2, …, card Γ

- elementy relacji R_Z w elementy relacji ${}_3X$

$$f_4: R_Z \to {}_3X \tag{10}$$

w ten sposób że:

$$f_4(\langle {}_1s_i, {}_2s_j \rangle) = \langle {}_1\underset{1}{x}_i \; {}_2x_{ij} \; {}_1\underset{2}{x}_j \rangle \tag{11}$$

gdzie: $\langle {}_1s_i, {}_2s_j \rangle \in R_Z$, $\langle {}_1\underset{1}{x}_i \; {}_2x_{ij} \; {}_1\underset{2}{x}_j \rangle \in {}_3X$

W wyniku tak zdefiniowanego ciągu odwzorowań F_i (i = 1, 2, 3, 4) otrzymuje się graf przepływowy struktury układu o ciągłym rozkładzie parametrów:

$$\vec{X} = \langle X, F \rangle \tag{12}$$

gdzie: $F = \{f_i\}$; i = 1, 2, 3, 4.

W kolejnym kroku w celu uzyskania obciążonej struktury grafu reprezentującej modelowany układ mechaniczny, należy dokonać przyporządkowań $F_j^{'}$ (j = 1, 2, 3):

- węzłom ${}_1\underset{1}{x}{}_i$ grafu przepływowego, wartości uogólnionych przemieszczeń jako:

$$f_1^{'}\left({}_1\underset{1}{x}{}_i\right) = \left|{}_1s_i\right|, \tag{13}$$

gdzie: ${}_1\underset{1}{x}{}_i \in {}_1X$, ${}_1s_i \in {}_1S$,

- węzłom ${}_1\underset{2}{x}{}_i$ grafu przepływowego, wartości uogólnionych sił jako:

$$f_2^{'}\left({}_1\underset{2}{x}{}_i\right) = \left|{}_2s_j\right|, \tag{14}$$

gdzie: ${}_1\underset{2}{x}{}_j \in {}_2X$, ${}_2s_j \in {}_2S$.

- łukom ${}_2x$ grafu przepływowego, wartości sztywności dynamicznych jako:

$$\begin{cases} f_3^{'}\left({}_2x\right) = \left|z_{ii}\right| \\ f_3^{'}\left({}_2x\right) = \left|z_{ij}\right| \end{cases} \tag{15}$$

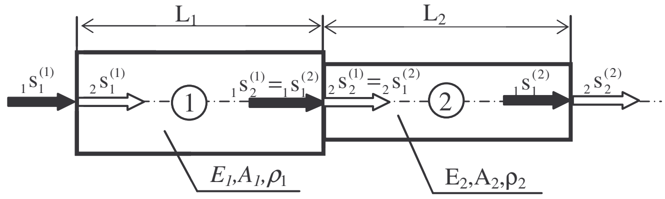
gdzie: z_{ii} dla łuków łączących węzły ${}_1\underset{1}{x}{}_i$ i ${}_1\underset{2}{x}{}_i$

z_{ij} dla łuków łączących węzły ${}_1\underset{1}{x}{}_i$ i ${}_1\underset{2}{x}{}_j$

Ostatecznie w wyniku tak zdefiniowanych odwzorowań (4÷11) i przyporządkowań (13÷15) uzyskuje się graf mechanicznego układu ciągłego o odcinkowo stałym przekroju nazywany grafem przepływowym.

3. PRZYKŁAD MODELOWANIA UKŁADU DWUOGNIWOWEGO

Przykładowo rozpatrzono drgający wzdłużnie dwuogniwowy układ prętowy, który pokazano na rys.1.



Rys.1. Układ dwuogniwowy drgający wzdłużnie

Zależności pomiędzy przemieszczeniami końców ogniw a działającymi na nie siłami przyjęto w postaci:

- dla ogniwa pierwszego:

$$\begin{bmatrix} {}_2s_1^{(1)} \\ {}_2s_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(1)} & Z_{12}^{(1)} \\ Z_{21}^{(1)} & Z_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1s_1^{(1)} \\ {}_1s_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

- dla ogniwa drugiego:

$$\begin{bmatrix} {}_2s_1^{(2)} \\ {}_2s_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(2)} & Z_{12}^{(2)} \\ Z_{21}^{(2)} & Z_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1s_1^{(2)} \\ {}_1s_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Zastępując indeksy cyfrowe literowymi w celu uproszczenia zapisu otrzymano:

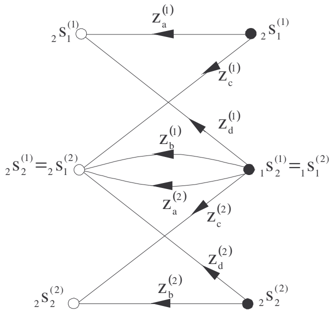
- dla ogniwa pierwszego:

$$\begin{bmatrix} {}_2s_1^{(1)} \\ {}_2s_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a^{(1)} & Z_c^{(1)} \\ Z_b^{(1)} & Z_d^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1s_1^{(1)} \\ {}_1s_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

- dla ogniwa drugiego:

$$\begin{bmatrix} {}_2s_1^{(2)} \\ {}_2s_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a^{(2)} & Z_c^{(2)} \\ Z_b^{(2)} & Z_d^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1s_1^{(2)} \\ {}_1s_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Dokonując odwzorowań (4÷11) i przyporządkowań (13÷15) utworzono graf przepływowy rys.2 jako model rozpatrywanego układu.



Rys.2. Graf przepływowy układu dwuogniwowego drgającego wzdłużnie

Przedstawiony sposób modelowania mechanicznych układów ciągłych grafami przepływowymi jest pierwszym krokiem do analizy tego typu układów. Uniwersalność stosowania tego typu grafów polega na możliwości wykorzystania ich w badaniu układów mechanicznych o strukturze dyskretnej jak również dyskretno – ciągłej.

LITERATURA

1. Świder J.: Macierzowe grafy hybrydowe w opisie drgających, złożonych układów mechanicznych. ZN Pol. Śląskiej, s. Mechanika, z.106, Gliwice 1991
2. Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych ZN Pol. Śląskiej, s. Mechanika, z.104, Gliwice 1991
3. Buchacz A. Świder J.: Szkielety hipergrafów w modelowaniu, badaniu i pozycjonowaniu manipulatorów robotów oraz podzespołów maszyn. Wydawnictwo Pol. Śl., Gliwice 2000.
4. Wojnarowski J.: Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych. PTMTS, Gliwice 1977.